

Anales PANEL'81/12 JAIIO
Sociedad Argentina de informática
e Investigación Operativa. Buenos Aires, 1981

ANALISIS ESTADISTICO DE TOLERANCIAS EN SISTEMAS CONTINUOS

Dieter Suiter

Universitat Erlangen - Nürnberg/República Federal de Alemania.
Actualmente profesor visitante en la
Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso - Chile.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para el análisis estadístico de las tolerancias de sistemas continuos que es más exacto que el método de la propagación del error y requiere menos tiempo de computación que el método de Monte Carlo. El método se basa en la obtención de los momentos estadísticos hasta el 4° orden de la función del sistema para aproximar con ellos la función de densidad de probabilidad con las curvas de Pearson.

Se describe un programa que realiza un análisis estadístico de tolerancias de acuerdo a este método y se da un ejemplo en el cual se comparan los resultados con los obtenidos por el método de la propagación del error y el método de Monte Carlo.

1. INTRODUCCIÓN

El objeto del análisis de tolerancias es determinar la influencia que tienen sobre la característica de un sistema variaciones de sus parámetros. Estas variaciones pueden, en muchos casos, suponerse del tipo estadístico, vale decir, que obedecen a una determinada distribución.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el sistema a analizar tiene una sola entrada y una sola salida, tal como se muestra en la figura 1.

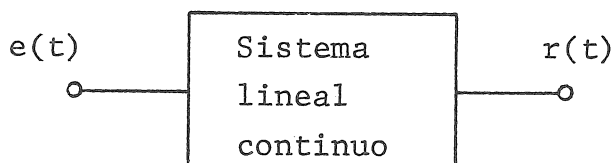


Fig. 1: Sistema considerado en el análisis de tolerancias.

Entonces, si los parámetros del sistema se reúnen en el vector $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, la respuesta está dada por:

$$r(t) = r(\underline{x}, e(t)) \quad (1)$$

Un sistema lineal continuo puede ser caracterizado ya sea por su respuesta a impulso $h(t)$, su respuesta a escalón $a(t)$ o por su función de transferencia $H(s)$. Aquí no tiene importancia cual de estas funciones se use. En el desarrollo que sigue se usará la letra f en representación de cualquiera de estas tres. Cada una de ellas se obtiene de la ec.(1) y es función del vector de parámetros $\underline{x}$ y de la variable independiente t o s . Como el análisis de tolerancias interesa para un determinado valor de t o de s a la vez, las funciones que caracterizan un sistema pueden suponerse siempre de la forma

$$f = f(\underline{x}) \quad (2)$$

Si los parámetros $x_1, x_2, \dots, x_n$ son variables aleatorias de distribución determinada, tanto la respuesta $r(t)$ como la función $f(\underline{x})$ pasan a ser también variables aleatorias.

El problema que se trata de resolver a continuación es justamente la obtención de la distribución de $f(\underline{x})$.

Existen diferentes métodos para lograr este objetivo [1, 2, 3]. El más directo es el método de la transformación de las distribuciones, pero debido a la complejidad de las funciones (1) y (2) no es práctico de aplicar en sistemas grandes.

Quedan entonces sólo los métodos aproximados que serán tratados a continuación.

2. EL METODO DE LA PROPAGACION DEL ERROR

Debido a su simplicidad, este es el método más usado en el análisis estadístico de tolerancias. Se basa en el teorema del límite central de la estadística, que establece que la distribución de una suma de n variables aleatorias independientes con valor medio y varianza limitados tiende para $n \rightarrow \infty$ a una distribución normal.

Este teorema puede ser aplicado entonces si la función $f(\underline{x})$ que caracteriza al sistema puede ser aproximada con suficiente exactitud por una serie de Taylor de primer orden, es decir, si

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad (3)$$

si el número de parámetros es elevado, si son estadísticamente independientes y si las derivadas de $f(\underline{x})$ respecto a los parámetros tienen el mismo orden de magnitud. La forma de la distribución de cada parámetro no tiene importancia sino solamente su valor medio y su desviación estándar.

Bajo estas premisas, la función $f(\underline{x})$ se puede suponer distribuida normalmente y por lo tanto es suficiente determinar su valor medio y su varianza. De la ec.(3) se obtiene entonces:

$$m_{\Delta f} = E(\Delta f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E(\Delta x_i) \quad (4)$$

$$\sigma_{\Delta f}^2 = E[(\Delta f - m_{\Delta f})^2] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (5)$$

En la mayoría de los casos la distribución de los parámetros es simétrica. Entonces $E(\Delta x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y de acuerdo a ec.(4) $m_{\Delta f} = 0$. La ec.(5) se conoce como ley de la propagación del error.

La ventaja de este método radica en la facilidad de la obtención de los parámetros de la distribución normal de acuerdo a las ecs. (4) y (5). Sin embargo, el método fracasa, si las suposiciones hechas al comienzo ya no son válidas, es decir, si las derivadas de orden superior en la aproximación de $f(\underline{x})$ por una serie de Taylor no son despreciables. No se podrá esperar entonces, que $f(\underline{x})$ tenga distribución normal.

3. EL METODO DE MONTE CARLO

Este método se basa en la simulación por computador de un elevado número de sistemas con parámetros proporcionados por un generador de números al azar (random generator) de acuerdo a una distribución prescrita.

Los resultados de las simulaciones son ordenados en clases, lo que lleva a un histograma como aproximación de la distribución buscada.

La desventaja de este método radica en el elevado tiempo de computación necesario para las simulaciones del sistema. En cambio tiene como ventaja que se pueda obtener una elevada precisión, limitada solamente por el tamaño de la muestra (= número de simulaciones).

4. EL METODO DE LAS CURVAS DE PEARSON

En este método se aproxima primero la función $f(\underline{x})$ por una serie de Taylor de 2° orden alrededor del valor nominal de los parámetros $\underline{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]'$ obteniendo para la desviación de f de su valor nominal

$$\Delta f = f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \quad (6)$$

Luego se calculan los primeros cuatro momentos de Δf

$$m_k = E[(\Delta f)^k] \quad k = 1, \dots, 4 \quad (7a)$$

En [4] se dan las fórmulas para estos momentos bajo la suposición de parámetros estadísticamente independientes, con una densidad simétrica y con valor nominal igual al valor medio.

En seguida se determinan los momentos centrales de acuerdo a

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta f - m_1)^k p(\Delta f) d(\Delta f), \quad (7b)$$

obteniendo

$$\mu_0 = 1 \quad (8a)$$

$$\mu_1 = 0 \quad (8b)$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \quad (8c)$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \quad (8d)$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 \quad (8e)$$

Conociendo μ_k , $k = 0, 1, \dots, 4$ se aproxima la función de densidad de probabilidad $p(\Delta f)$ por una de las curvas del sistema de curvas de Pearson que se tratará a continuación.

4.1. LAS CURVAS DE PEARSON [5]

Las curvas de Pearson se obtienen como soluciones a la ecuación diferencial

$$\frac{dp(z)}{dz} = p(z) \frac{z + a}{b_0 + b_1z + b_2z^2} \quad (9)$$

donde $p(z)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria Z (que reemplaza aquí a Δf).

Dependiendo de los parámetros a , b_0 , b_1 y b_2 se obtienen como soluciones de la ecuación diferencial (9) las más variadas formas de distribuciones incluyendo como casos especiales la distribución normal, uniforme, beta, gama, exponencial y log-normal.

La ventaja del sistema de curvas de Pearson está en la simplicidad con que se pueden expresar los cuatro parámetros a , b_0 , b_1 , b_2 como funciones de los cuatro primeros momentos de la distribución a aproximar [5, 6]:

$$a = \frac{1}{D} \mu_3 (\mu_4 - 3\mu_2^2) \quad (10a)$$

$$b_0 = -\frac{1}{D} \mu_2 (4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2) \quad (10b)$$

$$b_1 = -a \quad (10c)$$

$$b_2 = -\frac{1}{D} (2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^2) \quad (10d)$$

$$D = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2 \quad (10e)$$

En la integración de la ecuación diferencial (9) se obtienen diferentes soluciones, dependiendo de la ubicación de los ceros del polinomio $b_0 + b_1z + b_2z^2$, dados por:

$$z_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2} \pm \frac{1}{2b_2} \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2} \quad (11)$$

De aquí se puede ver que la ubicación de los ceros dependerá de

$$K = \frac{b_1^2}{4b_0b_2} \quad (12)$$

que puede ser usado como criterio para diferenciar las distintas soluciones. Adoptando la misma nomenclatura usada originalmente por Pearson, existen los siguientes tipos básicos:

Tipo I : $-\infty < K < 0$ ceros reales de signos diferentes.

Tipo IV : $0 < K < 1$ ceros complejos conjugados.

Tipo VI : $1 < K < \infty$ ceros reales de igual signo.

Fuera de estos tipos básicos existen otros que se presentan en los límites de las zonas definidas anteriormente y que pueden ser tratados como casos especiales de los primeros.

Introduciendo las ecs. (10a-e) a la ec. (12) y transformándola, se puede expresar K solamente en función de "skewness" y "excess"

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}, \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (13a,b)$$

obteniendo

$$K = \frac{\beta_1 (\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} \quad (14)$$

lo que muestra, que la ubicación de los ceros del polinomio y por lo tanto, el tipo de curva a usar para la aproximación dependen sólo de los dos parámetros β_1 y β_2 . Esto permite construir el gráfico mostrado en la figura 2, que indica para cada tipo de curva la región correspondiente de los valores β_1 , β_2 . Alrededor de este gráfico se indican también las formas típicas que pueden tomar las diferentes curvas del sistema. Conociendo β_1 y β_2 de una variable aleatoria, podemos determinar inmediatamente con ayuda de este gráfico, con qué tipo de curva debe ser aproximada su función de densidad de probabilidad.

4.1.1. LAS CURVAS DEL TIPO I

Introduciendo la condición $-\infty < K < 0$ a la ec.(14) y considerando que $\beta_1 \geq 0$, se obtiene como región para los valores (β_1, β_2) la definida por

$(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1) < 0$, es decir, la comprendida entre las rectas

$$2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0, \quad 4\beta_2 - 3\beta_1 = 0 \quad (15a,b)$$

y el eje de ordenadas $\beta_1 = 0$. Un análisis más exacto [7] lleva, sin embargo, a la conclusión, que el límite inferior de la región I está dado por $\beta_2 - \beta_1 - 1 = 0$.

La solución de la ec. dif. es en este caso:

$$p(z) = c(z - z_1)^{k_1} (z_2 - z)^{k_2}, \quad z_1 < z < z_2 \quad (16)$$

donde z_1 y z_2 son aquí ceros reales según ec. (11) y

$$k_1 = \frac{z_1 + a}{b_2(z_1 - z_2)}; \quad k_2 = \frac{z_2 + a}{b_2(z_2 - z_1)} \quad (17a,b)$$

La constante c se determina a partir de la condición de normalización

$$\int_{z_1}^{z_2} p(z) dz = 1 \quad (18)$$

obteniendo

$$c = (z_2 - z_1)^{-k_1 - k_2 - 1} \frac{\Gamma(k_1 + k_2 + 2)}{\Gamma(k_1 + 1) \Gamma(k_2 + 1)} \quad (19)$$

En la figura 2 se indican las diferentes formas que pueden tomar las curvas del tipo I. La función $p(z)$ de la ec.(16) se conoce también como distribución beta.

4.1.2. LAS CURVAS DEL TIPO IV

Introduciendo la condición $0 < K < 1$ a la ec. (14) y considerando que $\beta_1 \geq 0$, se obtiene como región para los valores (β_1, β_2) en la fig. 2, la comprendida entre el eje $\beta_1 = 0$ y la curva

$$4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1) = \beta_1(\beta_2 + 3)^2 \quad (20)$$

En este caso $z_1 = z_2^*$ y la solución de la ec. dif. es:

$$p(z) = c \left[1 + \left(\frac{z}{d} - \frac{v}{r} \right)^2 \right]^{-m} \cdot \exp \left[-v \cdot \arctan \left(\frac{z}{d} - \frac{v}{r} \right) \right] \quad (21)$$

$$\text{donde } d = \frac{1}{2b_2} \sqrt{4b_0b_2 - b_1^2} \quad v = \frac{1}{b_2d} \left(\frac{b_1}{2b_2} - a \right)$$

$$m = - \frac{1}{2b_2} \quad r = 2m - 2$$

y z está definido en el intervalo $-\infty < z < \infty$.

La constante c no se puede obtener aquí en forma analítica de la condición de normalización como en el caso anterior. Hay que determinarla por integración numérica en el computador, para lo cual es necesario una transformación de variables para reducir el intervalo de integración en la condición de normalización

$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1$ a uno finito. Los detalles pueden ser consultados en el trabajo [7].

4.1.3. LAS CURVAS DEL TIPO VI

Con la condición $1 < K < \infty$ y $\beta_1 \geq 0$ obtenemos por un procedimiento similar a los anteriores 1 como límites de la región, los dados por las ecs. (15a) y (20).

El polinomio $b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ tiene en este caso ceros de igual signo que coincide como puede demostrarse, con el signo de μ_3 .

Eligiendo $z_1 < z_2$ en la ec. (11) se obtienen, dependiendo de μ_3 , dos soluciones de la ecuación diferencial:

a) para $\mu_3 > 0$, $z_1 < z_2 < 0$ y

$$p(z) = c(z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2}, \quad z_2 < z < \infty \quad (21)$$

b) para $\mu_3 < 0$, $0 < z_1 < z_2$ y

$$p(z) = c(z_1-z)^{k_1} (z_2-z)^{k_2}, \quad -\infty < z < z_1 \quad (23)$$

k_1 y k_2 están dados por las ecs. (17a, b) y las constantes se obtienen de las condiciones de normalización correspondientes.

Fuera de estos tres tipos básicos tratados aquí, existen casos especiales, que ocurren ya sea en el borde $\beta_1 = 0$ de las regiones I y IV o bien en los límites entre las tres regiones. Para cada uno de estos casos especiales se da un ejemplo en la figura 2. Las curvas del tipo III se conocen también por distribución gama y las del tipo V por distribución log-normal. Para $\beta_1=4$ y $\beta_2=9$ se obtiene como caso especial de las curvas del tipo III la distribución exponencial.

5. PROGRAMA PARA EL ANALISIS ESTADISTICO DE TOLERANCIAS

Se ha desarrollado un paquete de programas interactivos para un computador HP 21 MX que permite realizar un análisis estadístico de tolerancias por los tres métodos descritos en los párrafos 2, 3 y 4. El programa permite dirigir la ejecución en forma interactiva por diferentes módulos dependiendo del método que se desee usar, facilitando así una comparación de los resultados. Estos son entregados primero en forma gráfica en un terminal de video. El usuario puede decidir a continuación, si desea tener una copia dura de los resultados (o de parte de ellos) traspasándolos a un graficador o si prefiere repetir el análisis para otro valor de la variable independiente y/u otra distribución de los parámetros del sistema.

6. EJEMPLO

El programa descrito en 5 se ha usado para efectuar un análisis de tolerancias de un sistema con la función de transferencia:

$$f(\underline{x}, s) = \frac{x_2}{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 s^3 + (x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5) s^2 + (x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5) s + x_1 + x_2}$$

y los siguientes valores nominales de los parámetros:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ x_{04} \\ x_{05} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 0,9487 \\ 2,206 \\ 2,206 \end{bmatrix}$$

La tarea consiste en obtener la distribución de la magnitud de $f(\underline{x}, s)$ para diferentes valores de s , si los parámetros x_1 y x_2 mantienen su valor nominal y los parámetros x_3 , x_4 y x_5 tienen una distribución uniforme entre sus límites de tolerancia de $\pm 5\%$ como se muestra en la fig. 3.

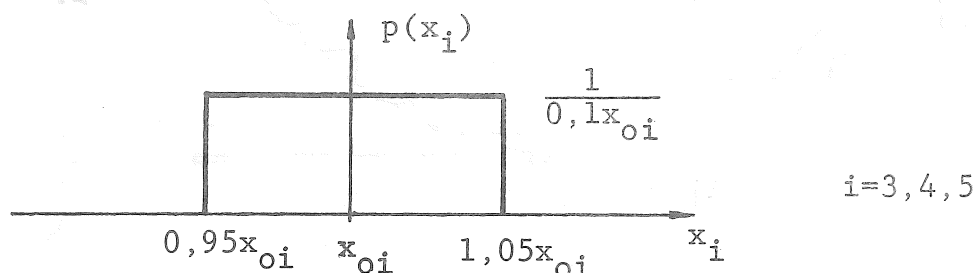


Fig.3: Distribución de los parámetros x_3 , x_4 y x_5

En la Fig. 4 se dan los resultados para cuatro valores diferentes de la variable independiente s . Para cada uno de ellos se hizo un análisis de tolerancias por los tres métodos descritos.

Como resultados se indican las funciones de densidad de probabilidad de la desviación de su valor nominal de la medida logarítmica de magnitud $a = -\ln|f|$.

7. CONCLUSIONES

Tal como se muestra en el ejemplo desarrollado aquí, el método de la aproximación de la función de densidad de probabilidad mediante curvas de Pearson, entrega resultados mucho más exactos que el método de la propagación del error, que en algunos casos incluso lleva a resultados totalmente erróneos.

El precio de esta mejora es un aumento en aproximadamente un factor 10 del tiempo de CPU, que aún es del orden de 100 veces menor al tiempo requerido para un análisis de Monte Carlo (suponiendo una muestra de 3000 como en el ejemplo).

Considerando esto se puede decir, que el método de la

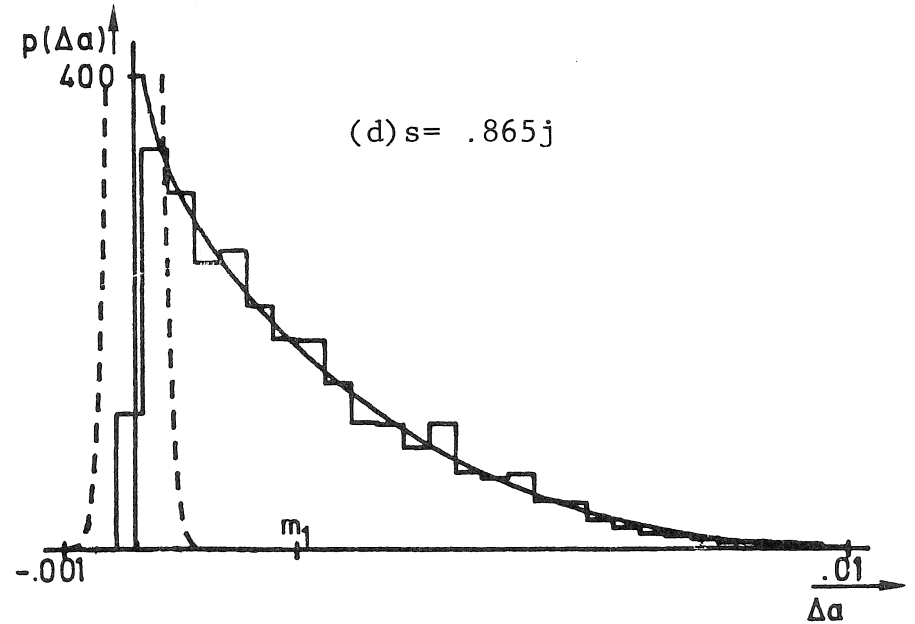
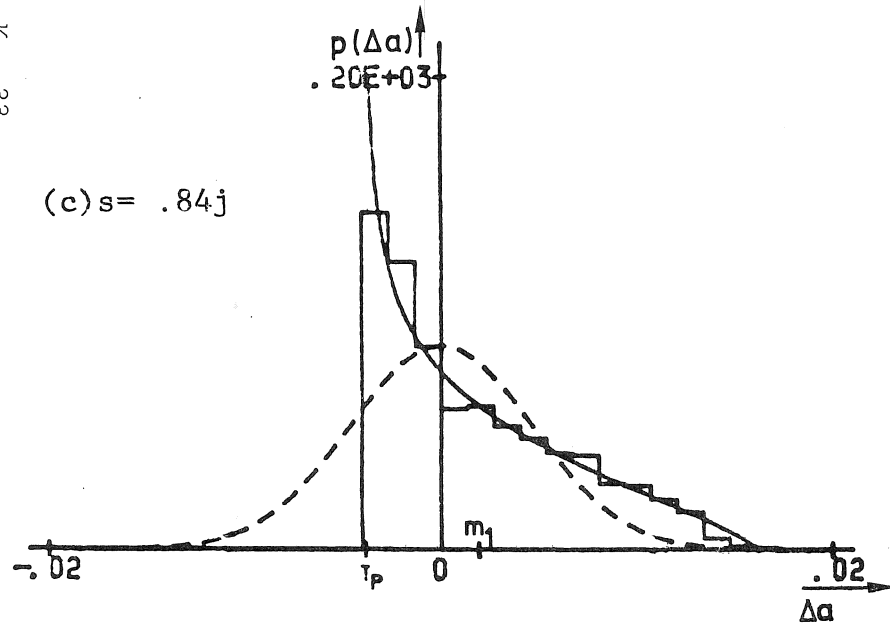
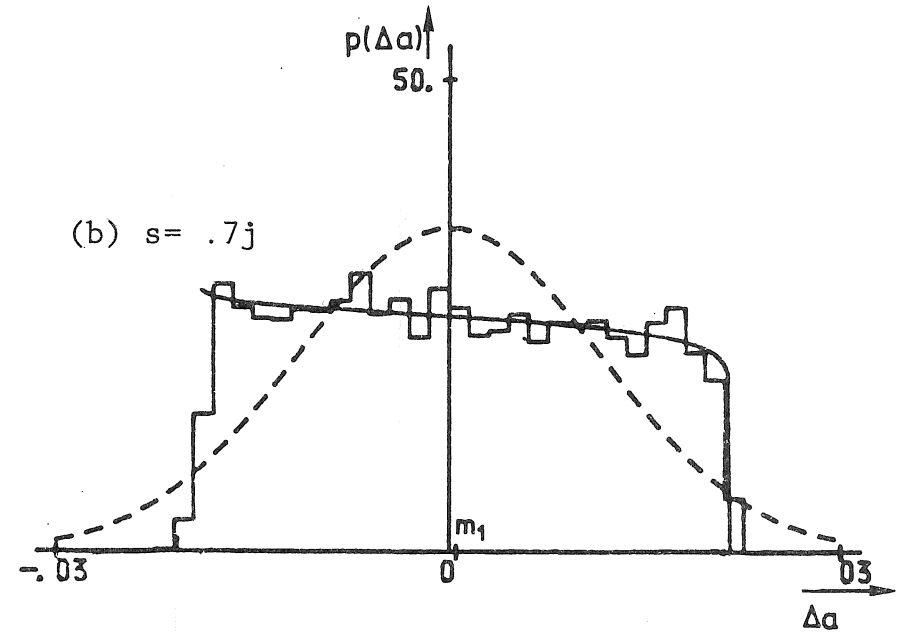
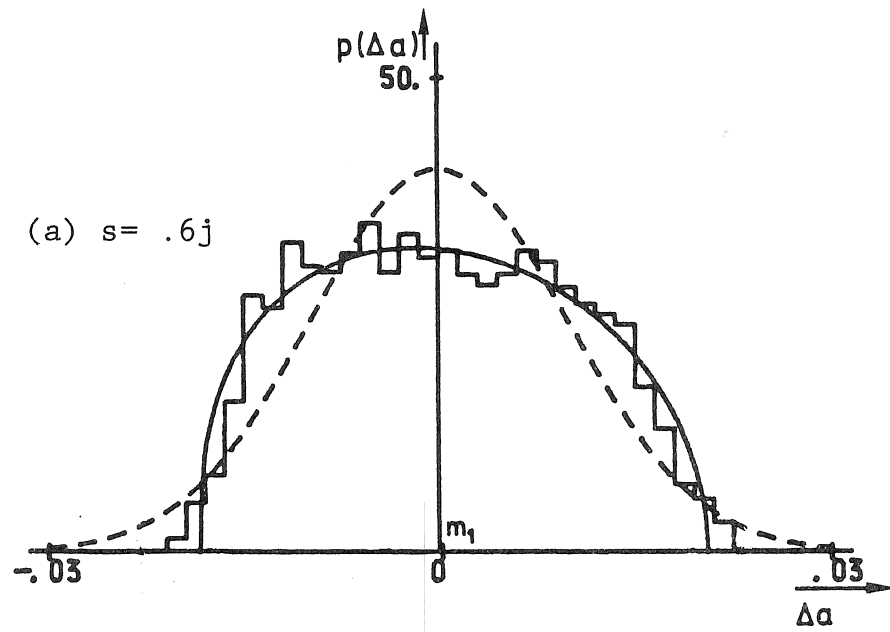


Fig. 4: Comparación de la aproximación de la f.d.p. por los tres métodos:
 — Curva de Pearson, ---- Distribución normal (propagación del error),
 〰 Método de Monte Carlo (muestra = 3000).

aproximación por curvas de Pearson es una alternativa atractiva en el análisis de tolerancias por cuanto es más exacto que el método de la propagación del error y no consume tanto tiempo como el método de Monte Carlo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Klötzner, W.G.: Statistische Verfahren zur Analyse von Schaltungen. NTZ 18 (1965), págs. 693-698.
- [2] Reinschke, K. : Toleranzanalyse elektrischer Schaltungen unter Berücksichtigung statistischer Kompensations- und Überlagerungseffekte. Nachrichtentechnik 17 (1967), Págs. 192-199.
- [3] Becker, D. : Zur Berechnung von Systemeigenschaften aus den Verteilungsfunktionen der Systembauteile (Methode der Verteilungstransformation). Frequenz 21 (1967), Págs. 286-292.
- 4 Gutsche, H. : Ein Beitrag zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichten von Systemfunktionen elektrischer Netzwerke. Frequenz 27 (1973), Págs. 45-51.
- [5] Elderton, W.P. ; Johnson, N.L.: Systems of Frequency Curves. Cambridge University Press, Cambridge 1969
- [6] Suiter, D. : Näherung der Wahrscheinlichkeitsdichten von Netzwerkfunktionen durch Pearsonsche Kurven AEU-Electronics and Communications. 31 (1977), Págs. 457-462.
- [7] Suiter, D. : Empfindlichkeitsoptimierung und Toleranzanalyse elektrischer Netzwerke Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1977.